

ESTIMACIÓN DE INCERTIDUMBRE EN LA CALIBRACIÓN DE TACÓMETROS ÓPTICOS

UNCERTAINTY ESTIMATION IN OPTICAL TACHOMETERS CALIBRATION

Liz C. Hernández, Nelson Bahamón

Instituto Nacional de Metrología (INM) de Colombia, Laboratorio de Tiempo y Frecuencia,
Avenida Carrera 50 No. 26 - 55 Interior 2, Bogotá, Colombia

(Recibido: Noviembre/2015. Aceptado: Marzo/2016)

Resumen

Se presenta el procedimiento matemático para estimar la incertidumbre en la calibración de tacómetros ópticos. Por tratarse de un dispositivo de baja jerarquía en mediciones de tiempo y frecuencia, se utiliza el concepto estadístico de desviación estándar para considerar la componente de incertidumbre por repetibilidad en lugar de la estabilidad. Se considera una situación relevante y frecuente en tacómetros consistente en que la componente por resolución es dominante; esto tiene una importante implicación al momento de escoger el factor de cobertura para la obtención de la incertidumbre expandida ya que no se tienen las condiciones para satisfacer de forma aproximada el teorema del límite central.

Palabras clave: Incertidumbre, tacómetro, calibración, teorema del límite central, metrología.

Abstract

The mathematical procedure to estimate the uncertainty of the optical tachometers calibration is presented. The statistical concept of standard deviation is used to consider the repeatability component rather than stability,

Liz C. Hernández: lhernandez@inm.gov.co

Nelson Bahamón: nbahamon@inm.gov.co

since this instrument is a device of low level on time and frequency measurements. A relevant and common situation is considered in which the resolution component is dominant; this has an important implication in choosing the coverage factor to obtain the expanded uncertainty because the conditions to satisfy roughly the central limit theorem are not hold.

Keywords: Uncertainty, tachometer, calibration, central limit theorem, metrology.

1. Introducción

En Colombia hace falta una gran difusión y maduración del tema de la metrología, como importante herramienta para el desarrollo científico y técnico. En particular en las magnitudes de Tiempo y Frecuencia no hay documentos legales ni guías de calibración u otros relacionados, que permitan establecer lineamientos y parámetros a seguir por quienes trabajan en laboratorios de metrología de la red secundaria o en empresas que de alguna manera están interesadas en el tema de Tiempo y Frecuencia.

Este documento hace un estudio acerca de la obtención de la incertidumbre en la calibración de tacómetros. Dada la alta repetibilidad que estos dispositivos tienen en su lectura, sucede con frecuencia que esta componente de incertidumbre se hace cero y la componente por resolución resulta dominante.

El tema de la dominancia de una componente de incertidumbre es importante por su relación con la distribución de probabilidad de salida asociada a la incertidumbre combinada. Se trata de un tema que se obvia con frecuencia, asumiendo de entrada que se cumplen aproximadamente las condiciones para satisfacer, el teorema del límite central, lo cual no siempre es cierto. En la sección 3 se incluye un breve comentario sobre el tema.

Teniendo en cuenta estos elementos, este artículo tiene también el propósito de convertirse, al menos desde el punto de vista matemático, en una guía para la calibración de tacómetros.

Se presenta en primer lugar el aspecto del montaje experimental y de la toma de medidas (sección 2); luego el modelo matemático en la estimación de incertidumbre (secciones 3 y 4), que es, la parte fundamental de este documento; se presentan los resultados obtenidos (sección 5), para cuatro casos que tienen comportamientos diferentes desde el punto de vista estadístico lo cual permite hacer un análisis claro y general (sección 6). Finalmente se presentan las conclusiones (sección 7).

2. Aspecto Experimental

Un tacómetro es un instrumento que mide frecuencia de rotación. Puede captar la señal del objeto que rota mediante acoples mecánicos y/o mediante un fotosensor. Los tacómetros de lectura óptica, o foto tacómetros, tienen una base de tiempo interna. La frecuencia generada con el oscilador interno alimenta un transductor óptico; el transductor óptico emite una señal lumínica, la cual incide sobre el objeto que rota y es reflejada; la señal reflejada se recibe en el tacómetro mediante otro transductor óptico (fotodiodo) y pasa a un sistema de conteo. La lectura es presentada en una pantalla digital, por lo general, en unidades de revoluciones por minuto (RPM).

2.1. Método de calibración

El método de calibración corresponde a mediciones directas de frecuencia [1].

La señal generada por un sintetizador de frecuencias es acoplada a un transductor óptico; esta frecuencia es leída por el sistema óptico del tacómetro objeto de calibración y a la vez es monitoreada en la salida del sintetizador con la ayuda de un contador de frecuencia de alta resolución. El sintetizador y el contador de frecuencia están disciplinados al patrón primario del laboratorio (reloj atómico de Cesio), el cual es trazable al sistema internacional de unidades (SI) [2, 3]. La desviación fraccional de frecuencia se calcula teniendo en cuenta las dos lecturas.

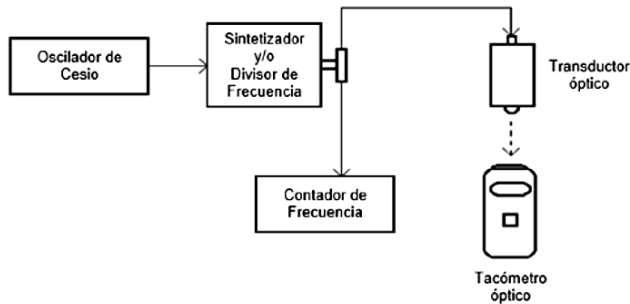


FIGURA 1. Diagrama de conexión para la calibración de tacómetros ópticos.

2.2. Adquisición de datos

- Se selecciona el valor patrón de salida en unidades de Hertz (Hz) en el sintetizador de frecuencias.
- El diodo emisor de luz (light-emitting diode – LED), que corresponde al módulo transductor óptico, se enfoca hacia la ventana de recepción del tacómetro bajo calibración, hasta que se produzca la lectura en el mismo, en revoluciones por minuto (RPM).
- La relación entre la frecuencia patrón (Hz) y la frecuencia bajo calibración (RPM) es [4]:

$$1 \text{ Hz} = 1 \text{ revolución por segundo} = 60 \text{ RPM}$$

- Una señal de monitoreo de que el tacómetro está leyendo corresponde a la activación de la señal de disparo dentro de su indicador digital.
- Se registran la cantidad de lecturas para cada valor de frecuencia, apagando y prendiendo el tacómetro entre una y otra medición. Normalmente son diez (10) lecturas.

2.3. Alcance de medición

- Los datos usados como referencia corresponden a datos de calibraciones de tacómetros con sistema de lectura óptico.
- Las mediciones fueron efectuadas para el intervalo de medición comprendido desde 6 RPM a 99 999 RPM.

3. Acerca del teorema del límite central en el campo de la metrología

La importancia del teorema del límite central en metrología, radica en la suposición frecuente de que sus condiciones se cumplen de forma aproximada y de que por lo tanto la distribución de probabilidad de la variable de salida es aproximadamente normal. Esto reduce el procedimiento a suponer que el factor de cobertura para la obtención de la incertidumbre expandida es igual a 2. La palabra “aproximadamente” es muy importante en este contexto; una distribución de probabilidad completamente normal solo se tiene si el número de variables de entrada es infinito. Una discusión más detallada de esto, puede encontrarse en el anexo G de la referencia [5].

En sí, este documento se centra en analizar los casos en que la distribución de salida es aproximadamente rectangular y aproximadamente normal. Se presentan los resultados (ver sección 5) con 4 juegos de datos experimentales; en ninguno de estos casos el factor de cobertura es exactamente 2.

4. Estimación de la incertidumbre

En primer lugar, se muestra la obtención de la incertidumbre combinada y luego el análisis de componente dominante de incertidumbre (fundamental en este trabajo). De este análisis se desprenden dos posibilidades: que la distribución de salida sea aproximadamente normal o que sea aproximadamente rectangular; se muestra en cada caso la manera de obtener el factor de cobertura, para llegar a la incertidumbre expandida.

La figura 2 ilustra el proceso de estimación de incertidumbre en su totalidad.

4.1. Incertidumbre combinada

El modelo matemático corresponde a la desviación fraccional de frecuencia. Se tiene:

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{f_m - f_n}{f_n} \quad (1)$$

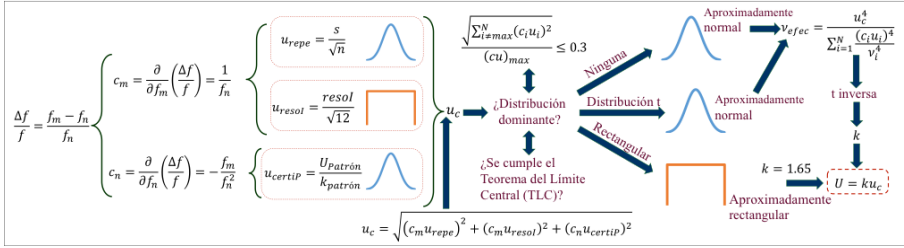


FIGURA 2. Diagrama del proceso de estimación de incertidumbre en la calibración de tacómetros ópticos.

Donde:

f_m = Frecuencia medida. Es el valor de frecuencia medido por el tacómetro.

f_n = Frecuencia nominal. Es el valor de frecuencia generado por el patrón.

Entonces se tienen los siguientes coeficientes de sensibilidad:

$$c_m = \frac{\partial}{\partial f_m} \left(\frac{\Delta f}{f} \right) = \frac{1}{f_n} \quad (2)$$

$$c_n = \frac{\partial}{\partial f_n} \left(\frac{\Delta f}{f} \right) = -\frac{f_m}{f_n^2} \quad (3)$$

Las componentes de incertidumbre son, repetibilidad, resolución del instrumento bajo prueba y la componente del certificado del patrón.

Componente de repetibilidad:

$$u_{repe} = \frac{s}{\sqrt{n}} \quad (4)$$

Donde:

s = Desviación estándar muestral de los datos medidos.

n = Número de datos (normalmente 10).

Componente de resolución del instrumento:

$$u_{resol} = \frac{resol}{\sqrt{12}} \quad (5)$$

Donde:

$resol$ = Resolución del tacómetro (por ejemplo 0.1 RPM).

Componente del certificado del patrón:

$$u_{certiP} = \frac{U_{patrón}}{k_{patrón}} \quad (6)$$

Donde:

$U_{patrón}$ = Incertidumbre expandida reportada por el certificado del instrumento patrón.

$k_{patrón}$ = Factor de cobertura reportado por el certificado del instrumento patrón. Incertidumbre expandida.

Dadas las expresiones 1 a 6, se tiene la siguiente expresión para la incertidumbre combinada:

$$u_c = \sqrt{(c_m u_{repe})^2 + (c_m u_{resol})^2 + (c_n u_{certiP})^2} \quad (7)$$

Nótese que las componentes de repetibilidad y resolución, están asociadas al instrumento bajo prueba (tacómetro) y por esto les corresponde el coeficiente c_m , mientras que a la componente del certificado le corresponde el coeficiente c_n .

4.2. Análisis de dominancia

El propósito de esta sección es estudiar y comprender como es la distribución de salida en la estimación de incertidumbre o en otras palabras, la distribución de probabilidad asociada a la incertidumbre combinada. Este análisis es importante porque de ello depende la determinación del factor k de cobertura que permitirá obtener la incertidumbre expandida.

Como se comentó en la sección 3 se podría decir que la distribución de salida es aproximadamente normal. Sin embargo es importante establecer algún control de tipo numérico que determine un límite respecto de cuanto se va a aceptar dicha presunción y cuando no.

Lo primero que se tendría que tener en cuenta es el conocimiento de cómo son las distribuciones de probabilidad de entrada. La componente de repetibilidad es de tipo normal; esto es evidente dado que la componente da razón de la dispersión de los datos y por ello utiliza la desviación estándar (ver ecuación 4). La componente de resolución se asume habitualmente como rectangular por suponer simplemente que los datos se dispersan con igual probabilidad en el intervalo determinado por la resolución del instrumento; se puede decir que esta componente de incertidumbre, es debida al indicador del instrumento; el valor $\sqrt{12}$ (ver ecuación 5) está asociado a la distribución rectangular. Finalmente, la componente de incertidumbre asociada al patrón, puede resultar un poco ambigua. Si en el certificado de calibración aparece el valor $k = 2$ como factor de cobertura, se puede presuponer que la distribución es normal. Por otra parte se acostumbra con frecuencia suponer que la distribución asociada a una incertidumbre tomada de algún documento es rectangular, especialmente cuando no hay mayor conocimiento de la misma. Dadas las características del patrón utilizado en el desarrollo de este trabajo (ver sección 2), el factor de cobertura es por lo general 2. Se supone entonces que la distribución es normal. De cualquier manera, es de esperarse que la componente de incertidumbre del patrón, sea pequeña con respecto a las demás y aporte poco a la incertidumbre combinada. Entonces su distribución asociada no resulta tan relevante.

Una vez se tienen definidas las distribuciones de probabilidad de entrada, lo siguiente es comprender el concepto de dominancia. Es claro que de las tres componentes de incertidumbre, una hará un mayor aporte (mayor producto $c_i u_i$) a la incertidumbre combinada. Esto no significa sin embargo que dicha componente sea dominante, la dominancia significa que la componente aporta a la incertidumbre combinada en una medida tal, que incluso impone su propia distribución de probabilidad. Para fines de este trabajo, se propone el siguiente criterio matemático para determinar si una componente de incertidumbre es dominante:

$$\frac{\sqrt{\sum_{i \neq \text{máx}}^N (c_i u_i)^2}}{(cu)_{\text{máx}}} \leq 0,3 \quad (8)$$

Este criterio es tomado de la referencia [6]. Una vez determinada la componente de incertidumbre que hace un mayor aporte, se puede decir que es la “candidata a dominante” y que esto se va a determinar mediante la ecuación 8. En esta expresión se coloca el mayor producto cu en el denominador y la demás componentes, dentro de la sumatoria del radical en el numerador. Si se cumple la desigualdad, entonces la componente “candidata” es dominante.

De todas formas, dadas las expresiones 2 y 3 nótese que si f_n y f_m son similares, también lo son los coeficientes de sensibilidad. Entonces en la calibración de tacómetros la componente de incertidumbre candidata a dominante, se puede determinar directamente por el valor de u_i ; esta situación es frecuente en la magnitud de tiempo y frecuencia.

Respecto de la dominancia pueden presentarse 3 posibles situaciones:

- a) Que no exista ninguna componente dominante de incertidumbre.
- b) Que la distribución dominante sea normal.
- c) Que la distribución dominante sea rectangular.

Teniendo en cuenta el teorema del límite central, se puede decir que en las situaciones a) y b) la distribución de salida es normal mientras que en la situación c) la distribución de salida es rectangular; este es el caso excepcional pero se da con cierta frecuencia en la calibración de tacómetros cuando la componente por resolución es dominante.

4.3. Obtención de k , si la distribución de salida es aproximadamente normal

Esta situación se modela matemáticamente mediante el uso de la distribución de probabilidad t de Student. Esta distribución es una aproximación de la normal, para el caso en que se tienen pocos datos; en la medida en que se tienen muchos datos, la distribución t de Student tiende a la normal, siendo igual cuando el número de datos tiende a infinito. Desde el punto de vista matemático, esto

se modela mediante el número de grados de libertad asociado a la distribución t .

Una vez obtenida la incertidumbre combinada (ecuación 7) se procede a calcular el número de grados efectivos de libertad según la ecuación de Welch-Satterwaite [5]:

$$v_{efec} = \frac{u_c^4}{\sum_{i=1}^N \frac{(c_i u_i)^4}{v_i^4}} \quad (9)$$

Donde:

v_i = Grados de libertad de la componente i de incertidumbre.

Para el caso de la componente de repetibilidad el número de grados de libertad es $n - 1$.

$$v_{repe} = n - 1 \quad (10)$$

Para el caso de la componente por resolución se tiene una distribución rectangular. En ocasiones se toman infinitos grados de libertad para estas distribuciones, ya que este sería el valor si la distribución es perfecta y todos los posibles valores de la variable caen dentro del intervalo dado por la misma. Sin embargo, la GUM [5] sugiere un criterio más realista para estimar este valor, pues tomar infinito, es una idealización un poco extrema. El criterio está dado por la siguiente expresión:

$$v_i \approx \frac{1}{2} \left[\frac{\Delta u(x_i)}{u(x_i)} \right]^{-2} \quad (11)$$

El Δu es el intervalo de variación de la incertidumbre. Se puede decir que es como la “incertidumbre de la incertidumbre”. Entonces la expresión dentro del paréntesis está dada en forma relativa. Se puede decir que se trata del nivel de duda respecto del valor de la incertidumbre y su distribución. Así por ejemplo si el nivel de seguridad sobre esta información es del 95 %, el nivel de duda será del 5 % = 0.05; al reemplazar este valor en la expresión 11 se obtiene 200. Este es el criterio que se toma en este trabajo.

Por otra parte para la componente del patrón, el valor $k = 2$ sugiere infinitos grados de libertad. Sin embargo, se trata de información que no es clara. Cuando se toman datos de incertidumbre de un documento que no especifica el número de grados de libertad, es válido también seguir el criterio dado por la expresión 11.

Se tiene:
$$v_{resol} = v_{certiP} = 200 \quad (12)$$

Nota: En general se sugiere no tomar infinitos grados de libertad, pero es totalmente válido tomar un número mayor para la componente del patrón. Nótese por ejemplo que un nivel de duda del 1% en la expresión 11, da un resultado de 5000 grados de libertad.

Una vez obtenidos los grados efectivos de libertad mediante la expresión 9, se utiliza una tabla o un paquete de software para invertir la función t de Student y obtener el valor del factor k de cobertura. Finalmente se obtiene el valor de la incertidumbre expandida mediante la expresión:

$$U = k \times u_c \quad (13)$$

4.4. Obtención de k , si la distribución de salida es aproximadamente rectangular

Como ya se explicó, este caso se da cuando la componente por resolución es dominante. Esto sucede frecuentemente cuando la componente por repetibilidad es cero. En este caso el factor de cobertura es simplemente el asociado a la distribución rectangular dominante. Para una probabilidad de cobertura del 95 % está dado por [5]:

$$k = 1,65 \quad (14)$$

Luego se reemplaza en la expresión 13.

5. Resultados

Se tomaron 4 puntos diferentes para 3 tacómetros como se muestra en la tabla 1 y se obtuvieron las medidas para dichos puntos, ver tabla 2.

Punto (Hz)	Punto (RPM)	Tacómetro	Resolución en el punto
1	60	Sinometer DT2236B	0.01 RPM
5	300	Lutron DT-2236	0.1 RPM
250	15000	Madison AHT-3	1 RPM
1650	99000	Madison AHT-3	1 RPM

TABLA 1. Tacómetros utilizados.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	f_m (RPM)
60.00	60.00	60.00	60.00	60.00	60.00	60.00	60.00	60.00	60.00	60.00
300.1	300.2	299.9	299.9	300.0	299.9	300.0	300.1	300.2	300.1	300.04
15001	15001	15001	15001	15001	15001	15001	14998	15001	15001	15000.70
99011	99020	99001	98962	99011	98991	98991	99011	99011	99011	99002.00

TABLA 2. Medidas tomadas con el tacómetro bajo prueba.

Se obtuvieron los siguientes resultados para la incertidumbre combinada (Tabla 3):

f_n (RPM)	f_m (RPM)	c_m (1/RPM)	c_n (1/RPM)	u_{repe} (RPM)	u_{resol} (RPM)	u_{certiP} (RPM)	u_c (Hz/Hz)
60	60.00	0.0167	-0.0167	0.000	0.00289	0.00000135	0.0000481
300	300.04	0.00333	-0.00333	0.0371	0.0289	0.00000675	0.000157
15000	15000.70	0.0000667	-0.0000667	0.300	0.289	0.000338	0.0000278
99000	99002.00	0.0000101	-0.0000101	5.35	0.289	0.00223	0.0000541

TABLA 3. Incertidumbre combinada y componentes de incertidumbre.

Nótese que la incertidumbre combinada es realmente adimensional. Se acostumbra sin embargo, utilizar la expresión Hz/Hz.

Al hacer el análisis de dominancia se obtienen los valores mostrados en la tabla 4.

Como ya se ha mencionado, generalmente la componente por resolución es dominante cuando la componente por repetibilidad es cero; nótese que este es el caso del primer resultado de la tabla anterior. El siguiente paso es obtener el valor de k (Tabla 5).

Se ha dejado indicado el valor que se obtendría para el punto de 60 RPM si se presupusiera una distribución de salida aproximadamente normal. Sin embargo (ver sección 3.4) el factor correcto es 1.65. Como resultado final de la calibración se tienen los valores mostrados en la tabla 6.

f_n (RPM)	f_m (RPM)	c_m (1/RPM)	c_n (1/RPM)	u_{repe} (RPM)	u_{resol} (RPM)	u_{certiP} (RPM)	¿Componente dominante?
60	60.00	0.0167	-0.0167	0.000	0.00289	0.00000135	Resolución
300	300.04	0.00333	-0.00333	0.0371	0.0289	0.00000675	Ninguna
15000	15000.70	0.0000667	-0.0000667	0.300	0.289	0.000338	Ninguna
99000	99002.00	0.0000101	-0.0000101	5.35	0.289	0.00223	Repetibilidad

TABLA 4. Análisis de componente dominante de incertidumbre.

f_n (RPM)	v_{repe}	v_{resol}	v_{certiP}	v_{efe}	k
60	9	200	200	200	2.01
300	9	200	200	23	2.12
15000	9	200	200	32	2.08
99000	9	200	200	9	2.32

TABLA 5. Obtención del factor k de cobertura.

Es importante hacer una aclaración con respecto al tema de la diferencia de unidades en las tablas 3 y 6. Como puede verse en el desarrollo de la sección 4 los resultados finales, es decir la desviación fraccional de frecuencia y su respectiva incertidumbre expandida (ecuaciones 1 y 13) son adimensionales (están en Hz/Hz). Son estos los resultados que se presentan cuando se trata de instrumentos de alta jerarquía. En este caso por tratarse de tacómetros, es mejor pasar los resultados a unidades de RPM. Para ello se multiplica la desviación fraccional de frecuencia por la frecuencia nominal y la incertidumbre expandida por la frecuencia medida.

Por otra parte, también es bueno aclarar, que los resultados de la tabla 6, se presentan siguiendo el criterio de la GUM [5] de utilizar máximo 2 cifras significativas en la expresión de la incertidumbre.

f_m (RPM)	f_n (RPM)	Error (RPM)	Factor de cobertura k	Incertidumbre expandida U (RMP)
60.00	60.000	0.000	1.65	0.005
300.0	300.0	0.0	2.12	0.1
15001	15000.0	0.7	2.08	0.9
99002	99000	2	2.32	13

TABLA 6. Resultados de la calibración.

6. Análisis de resultados

Se ha explicado el paso a paso en la estimación de la incertidumbre para la calibración de tacómetros ópticos.

Los ejemplos desarrollados muestran con claridad como el factor de cobertura en la obtención de la incertidumbre expandida no siempre es 2. Si bien el Teorema del Límite Central es de gran importancia en estadística y en sus aplicaciones en metrología, no se debe asumir siempre que la distribución de salida es aproximadamente normal. En el caso de tacómetros (como ya se ha dicho en este documento) es común que la componente de incertidumbre por repetibilidad sea cero y que la resolución resulte dominante. Esta situación se presenta con alguna frecuencia en otros dispositivos de medición de tipo digital y debe ser tenida en cuenta.

Por otra parte, nótese la importancia del concepto de grados de libertad en el análisis, ya que algunos valores del factor k de cobertura pueden ser significativamente mayores a 2.

7. Conclusiones

La comprensión del Teorema del Límite Central y el estudio de la forma de la distribución de probabilidad de la función de salida, resulta fundamental para una correcta estimación de la incertidumbre.

Agradecimientos

Agradecemos a nuestro compañero, el físico Mayckol Morales Castro por su atento entusiasmo en la elaboración del presente artículo.

Agradecemos a nuestro compañero, el físico Alexander Martínez por su instrucción y transmisión de conocimientos en el tema de estimación de incertidumbre.

Referencias

- [1] CENAM and EMA, *Guía técnica sobre trazabilidad e incertidumbre en la metrología de tiempo y frecuencia.*, México, Revisión 01. Abril de 2008.
- [2] M. A. Lombardi *et al.*, J. Res. Natl. Inst. Stand. Technol. **116**, 557 (2011).
- [3] J. M. López *et al.*, in *Proc. XXXth Gen. Assem. URSI* (2011) p. 4.
- [4] H. Diaz and L. Palma, in *IEEE Conference on Precision Electromagnetic Measurements (CPEM 2014)* (2014) p. 2.
- [5] *J. C. G. M. Evaluation of measurement data - Guide to the expression of uncertainty in measurement*, Working Group 1 of the Joint Committee for Guides in Metrology, 1st ed. (2008).
- [6] *EA-4/02 M: 1999, Expression of the Uncertainty of Measurement in Calibration*, European cooperation for Accreditation (2013).